

Berechnung des Volumenschwerpunktes der Schweiz – einige Notizen von Urs Marti, swisstopo

1. Berechnungsformeln

Der Massenschwerpunkt eines unregelmässigen Körpers ergibt sich aus dem Integral über alle Massenelemente:

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int \vec{r}_i \rho(\vec{r}_i) dV$$

mit

\vec{r}_s	Vektor (Koordinaten) des Schwerpunktes
\vec{r}_i	Vektor (Koordinaten) eines Massenelementes
$\rho(\vec{r}_i)$	Dichte eines Massenelementes
dV	Volumen eines Massenelementes
M	Gesamtmasse des Modells

Nach der Diskretisierung ergibt sich in Komponenten ausgeschrieben:

$$x_s = \frac{1}{M} \sum x_i \rho_i V_i$$

$$y_s = \frac{1}{M} \sum y_i \rho_i V_i$$

$$z_s = \frac{1}{M} \sum z_i \rho_i V_i$$

x_s, y_s, z_s sind die Koordinaten des Gesamtschwerpunktes, x_i, y_i, z_i die Koordinaten des Schwerpunktes des Massenelementes und V_i das Volumen des Massenelementes.

Bei einer konstanten Dichte über das ganze Modell fallen die ρ_i weg und M kann durch V ersetzt werden. Daraus ergibt sich der Volumenschwerpunkt.

Bei quaderförmigen Massenelementen ist natürlich $V_i = l_i \cdot b_i \cdot h_i$ und $z_i = \frac{h_o + h_u}{2}$ wobei h_o und h_u die Höhen der Oberkante und der Unterkante des Quaders bezeichnen.

2. Verwendete Datensätze

Für die Berechnung des Volumenschwerpunktes der Schweiz benötigt man folgende Datensätze:

- ein digitales Höhenmodell
- einen digitalen Vektordatensatz der Landesgrenze
- die Definition der 'Nullhöhe' (Geoid, Ellipsoid oder eine beliebige andere Fläche)

Als digitales Höhenmodell wird DHM25 Version 2 verwendet. Dies genügt für die Berechnung. Ein höher auflösendes Modell würde die Resultate kaum verändern.

Als Grenzdatensatz wird die Landesgrenze aus swissBOUNDARIES3D verwendet. Dieser Datensatz enthält mehr als 50'000 Punkte und verlangsamt die Berechnung stark.

Der Grenzdatensatz wird nun dazu verwendet um zu prüfen, ob ein Massenelement des DHM25 innerhalb der Schweiz liegt und somit für die Berechnung verwendet werden muss. Dabei wurde nur getestet, ob der Mittelpunkt des Elementes in der Schweiz liegt. Falls ja, so wurde das ganze Element (25x25 Meter) verwendet - also nicht exakt an der Grenze abgeschnitten. Über das ganze Gebiet sollten sich die dadurch begangenen Fehler in etwa aufheben und das Resultat nur unbedeutend verfälschen.

Für die Schweiz liegt nur ein sehr grobes Dichtemodell der oberen Erdkruste vor. Auf dessen Einführung wurde in dieser Berechnung verzichtet. Man berechnet also nicht den eigentlichen Massenschwerpunkt, sondern den Volumenschwerpunkt. Man muss sich aber bewusst sein, dass der Massenschwerpunkt weit vom Volumenschwerpunkt entfernt liegen kann.

Die Definition der 'Nullfläche' ist ziemlich beliebig und hat einen Einfluss auf das Resultat. In dieser Berechnung wurde die Nullfläche der Schweizerischen Landesvermessung (Höhen über Meer) verwendet. Einige Alternativen wären: Höhen über dem Ellipsoid, Höhen über dem Geoid oder z.B. auch Höhen über der Krusten/Mantelgrenze (Moho). Zudem spielt es auch eine grosse Rolle (insbesondere für die Höhe), ob die Erdkrümmung berücksichtigt wird oder nicht. In dieser Berechnung wurde sie nicht berücksichtigt.

Von einigem Einfluss ist auch, ob die Berechnung im Schweizerischen Projektionssystem oder auf dem Ellipsoid durchgeführt wird. Durch den Einfluss der Projektionsverzerrung können auch hier leicht andere Ergebnisse erhalten werden. Diese Berechnungen wurden im Projektionssystem CH1903 durchgeführt.

3. Resultate

Der berechnete Volumenschwerpunkt liegt auf den Koordinaten:

674533 / 167450 / 902

Dies ist ziemlich genau der Ort, wo sich die drei Kantone Bern, Uri und Wallis treffen.



Nebenresultate

Neben dem eigentlichen Volumenschwerpunkt lieferte die Berechnung noch ein paar Nebenresultate:

Mittelpunkt der Schweiz: 660159 / 183643 (publizierte Werte: 660158 / 183641)

Mittlere Höhe der Schweiz: 1307 m

Fläche der Schweiz: 41284.3 km²

Volumen der Schweiz: 53958.1 km³

8.11.2011/ Urs Marti